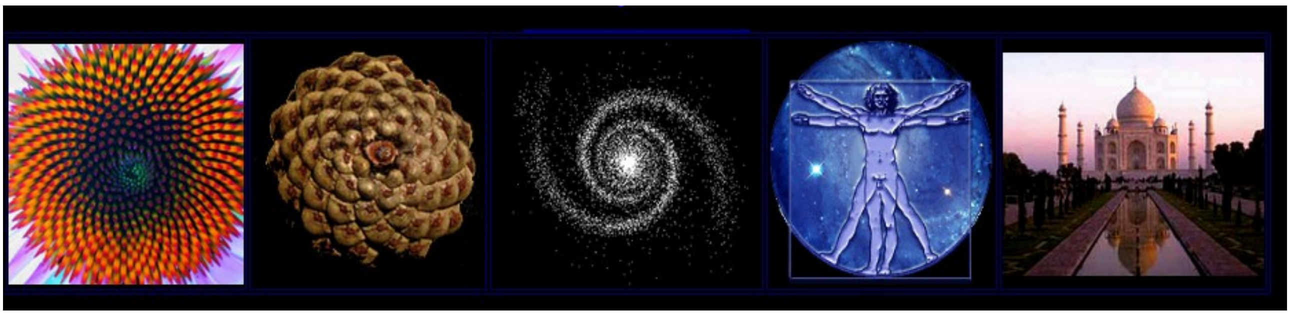
Le nombre d'or : La proportion divine

PEINTURE

D'autres tableaux s'inscrivent également dans le rectangle d'or. Des peintres comme Botticelli (La Naissance d Vénus), Corbusier (Modulor), Salvador Dali (Sacrement de la dernière cène), Mondrian (Composition), et bie d'autres encore, utilisèrent le Nombre d'Or pour réaliser leurs oeuvres...

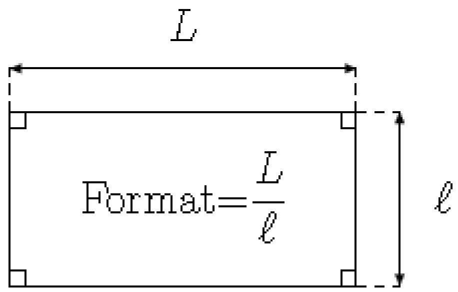
La composition se devait alors de mettre en valeur le sujet tout en produisant une circulation du regard afin d créer, au coeur de la toile, une harmonie absolue... De tout temps, l'artiste a cherché à produire cet équilibre entr la figure et son environnement. Cette quête trouva sa réponse dans le Nombre d'Or.



I- Définition mathématique du nombre d'or

a) Introduction :

En introduction nous allons aborder la notion de format d'un rectangle. Il s'agit de mesurer les proportions d'un rectangle en calculant le quotient $\frac{Longueur}{Largeur}$:



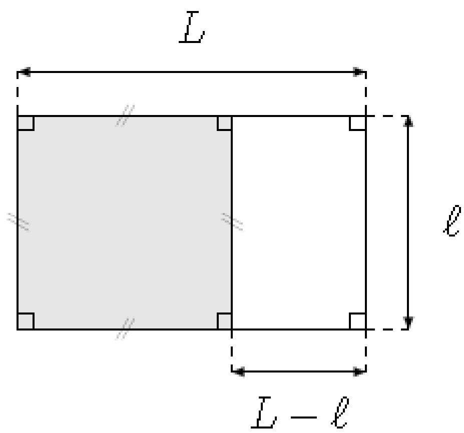
Exemple :

- les formats de téléviseurs : $\frac{L}{l}\ \frac{16}{9}$
- les formats de papier : les feuilles A3, A4,. . . sont au format $\sqrt{2}$ (ce qui permet par simple pliage d'obtenir un rectangle d'aire deux fois plus petite mais avec le même format).

b) Rectangle d'or :

On définit alors le **rectangle d'or** comme le seul rectangle vérifiant la condition suivante :

Le rectangle ABCD a un format $\frac{L}{l}$ *tel que si on lui retire le carré AEFD formé sur sa largeur, le rectangle EBCF restant a le même format que le rectangle de départ.*



Programme de construction d'un rectangle d'or :

1- Construire un carré *ABCD* de côté 10 cm et placer le point *O* milieu de [DC].
2- L'arc de cercle de centre *O* passant par B coupe la demi-droite [DC) en *F*.
2-Construire le point *E* tel que *AEFD* soit un rectangle.

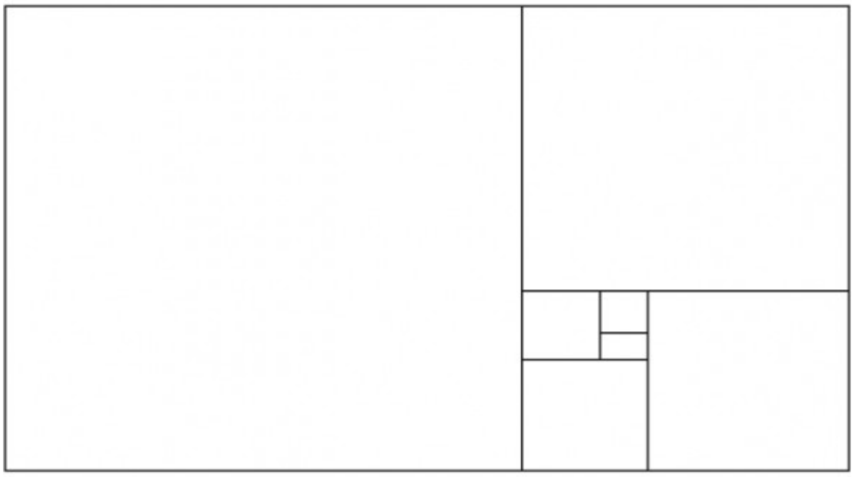
3- Montrer que OB = $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ cm.
4- Calculer la longueur DF du rectangle.

5- Montrer que $\frac{L}{l} = \frac{DF}{DA} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

6- Donner l'arrondi au dixième de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Le nombre d'or (noté φ) est un nombre particulier = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

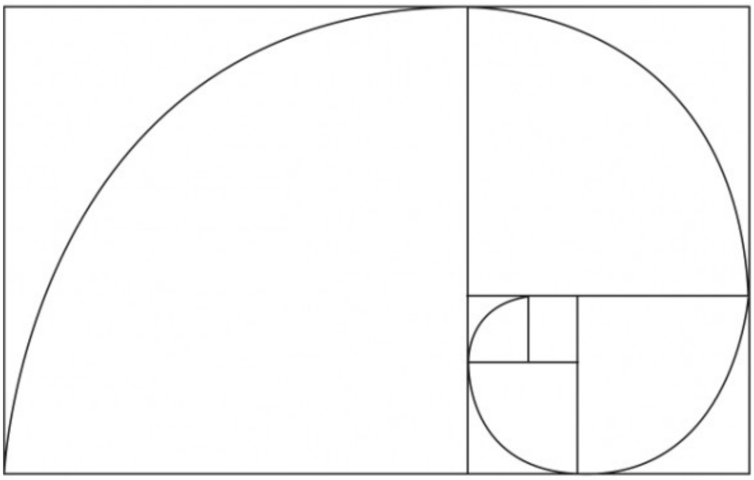
Prenons notre rectangle d’or comme point de départ. Retirons un carré dont le côté est égal à la largeur du rectangle. Nous obtiendrons ainsi un nouveau rectangle d’or, de taille plus petite. Si nous répétons le processus plusieurs fois, nous obtiendrons la figure suivante :

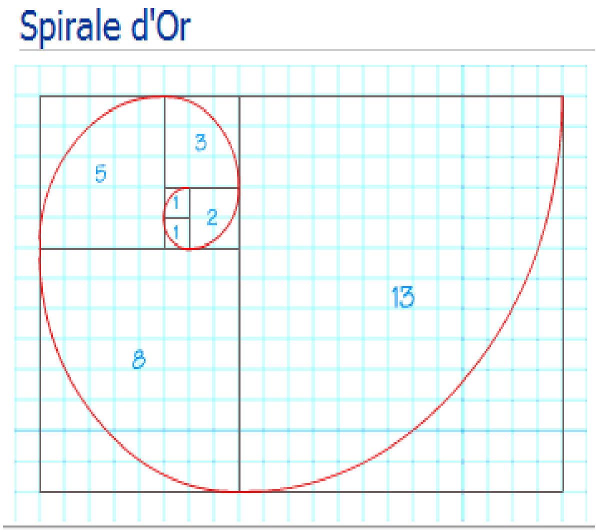


C- Spirale d'or :

Traçons maintenant des quarts de cercle dont le rayon est égal au côté de chacun des carrés de la figure précédente, avec pour centre leur sommet respectif. Nous aurons ainsi la figure suivante :

Les côtés des carrés sont une suite de **Fibonacci**



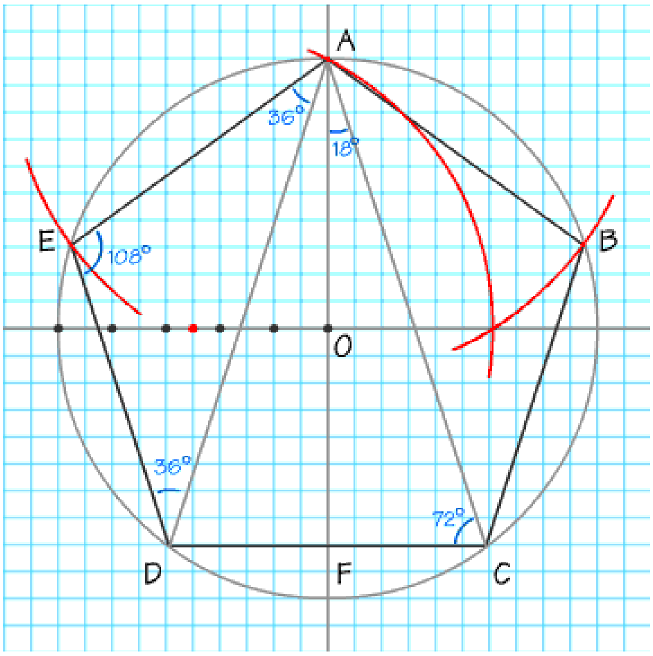


1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ...

La figure peut être construite à partir des rectangles d'or

D- Pentagone régulier :

Le pentagone régulier est un polygone régulier à 5 côtés inscrit dans un cercle et dont tous les côtés et tous les angles ont les mêmes mesures.
L'angle entre deux côtés consécutifs vaut 108°



Soit le triangle ADC et les triangles ADF et AFC

Calcul de FD

$$\frac{FD}{AD} = \sin 18^\circ$$

$$FD = AD \times \sin 18^\circ$$

$$\frac{FC}{AC} = \sin 18^\circ$$

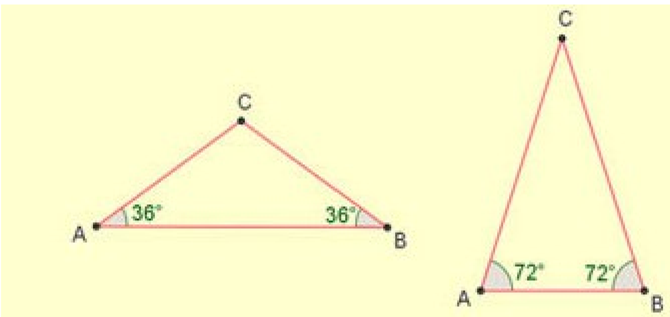
Soit **DC = AD sin 18° + AC sin 18°**
Soit **DC = AD x 2sin 18°**
DC = AD x 0,618

$$\frac{DC}{AC} = 0{,}618 \;\&\; \boxed{\frac{AD}{DC} = 1{,}618 = \Phi}$$

Le rapport entre une diagonale et un côté du pentagone est égal au nombre d'or
Les triangles AED et ADC sont des "triangles d'or" puisque leurs côtés sont dans le rapport du nombre d'or

E- Triangles d'or :

On appelle triangle d'or un triangle isocèle dont les côtés sont dans le rapport du nombre d'or.
De ce fait, les deux triangles d'or possibles ont des angles à la base de 36° ou 72 degrés.



F- Suite de FIBONACCI

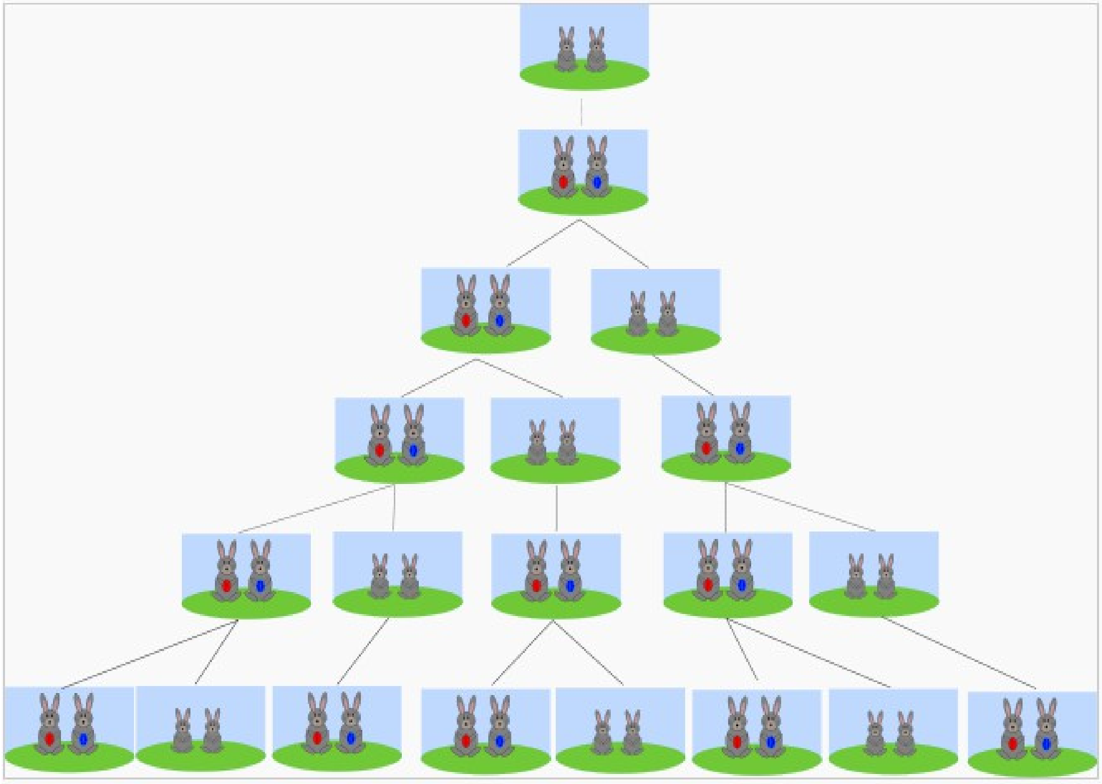
La **suite de Fibonacci** est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent. Elle commence généralement par les termes 0 et 1 (parfois 1 et 1) et ses premiers termes sont :

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, etc.

Elle doit son nom à Leonardo Fibonacci, dit *Leonardo Pisano*, un mathématicien italien du XIII^{e} siècle qui, dans un problème récréatif posé dans un de ses ouvrages, le *Liber Abaci*, décrit la croissance d'une population de lapins :

> « Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? »

Cette suite est fortement liée au nombre d'or, φ (phi). Ce nombre intervient dans l'expression du terme général de la suite. Inversement, la suite de Fibonacci intervient dans l'écriture des réduites de l'expression de φ (phi) en fraction continue : les quotients de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont les meilleures approximations1 du nombre d'or.



Croissance de population des lapins selon une suite de Fibonacci

II-Rapide histoire du nombre d'or.

Nombre d'or, Section dorée, Divine proportion et autres appellations mystiques. . . sont des dénominations qui désignent un rapport arithmétique : le nombre d'or. Ce dernier n'est ni une mesure, ni une dimension,c'est un rapport entre deux grandeurs homogènes.

L'histoire de cette proportion commence à une période reculée de l'antiquité grecque (le Parthénon d'Athènes et, plus ancien encore, la pyramide de Khéops). À la Renaissance, Luca Pacioli, un moine franciscain italien, la met à l'honneur dans un manuel de mathématiques et la surnomme **divine proportion** en l'associant à un idéal envoyé du ciel. Cette vision se développe et s'enrichit d'une dimension esthétique, principalement au cours des XIXe et XXe siècles où naissent les termes de section dorée et de nombre d'or.

ce nombre d'or est utilisé depuis 5000 ans par les Hommes. Ainsi certains dolmens répondent à ces proportions. De même, les règles strictes de l'art égyptien respectent le nombre d'or (voir image 1). C'est le cas aussi de l'art grec (exemple de la façade du Parthénon, image 2). Mais les exemples sont extrêmement nombreux dans l'Histoire de l'Art: croquis de Léonard de Vinci, tableau de Dürer ou de Picasso, plan des cathédrales, rosaces, etc...

Enfin, on retrouve ce nombre d'or dans la nature: ammonites, escargots, visage humain (image 3), proportion des membres d'un corps humain ou d'un corps animal.

Dans sa volonté d'imiter la nature, les artistes ont donc naturellement utilisé le nombre d'or depuis 5000 ans. Comment l'ont-ils découvert? Comment ont-ils appris à l'utiliser, à le mettre en pratique? Cela demeure un réel mystère.

III- Nombre d'or : Cathédrales et architecture

La pyramide de Khéops :

Le rapport de son apothème par sa demi-base est égal au nombre d’or.

Image :1

<u>Dimensions</u> :

hauteur initiale : 146,7 m
longueur du côté de la base : 230 m longueur de la demi-base : B = 115 m longueur de l’apothème : A = 186,4 m

A / B ≈ 1,617

Quelques-unes des cathédrales françaises parmi les plus remarquables, sans pour autant se révéler totalement. Cependant, il est difficile de rester sceptique à l’examen détaillé de la façade de l’œuvre majeure de Phidias : le Parthénon. On découvre avec ravissement que les divers éléments qui la composent se déclinent en autant de rectangles d’or.

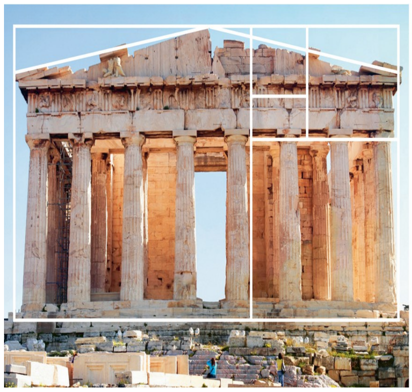
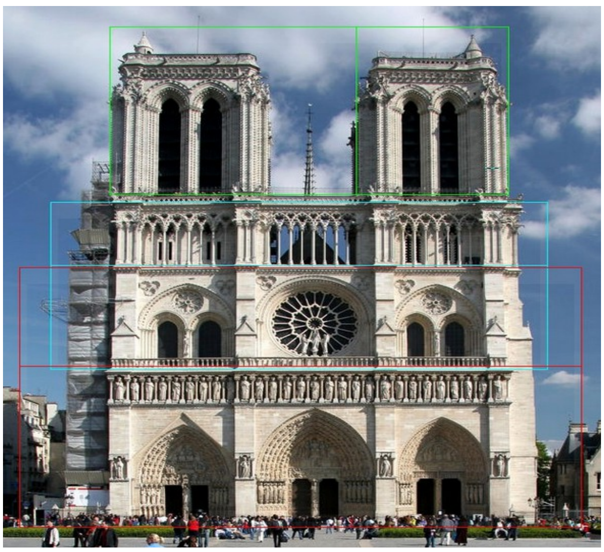
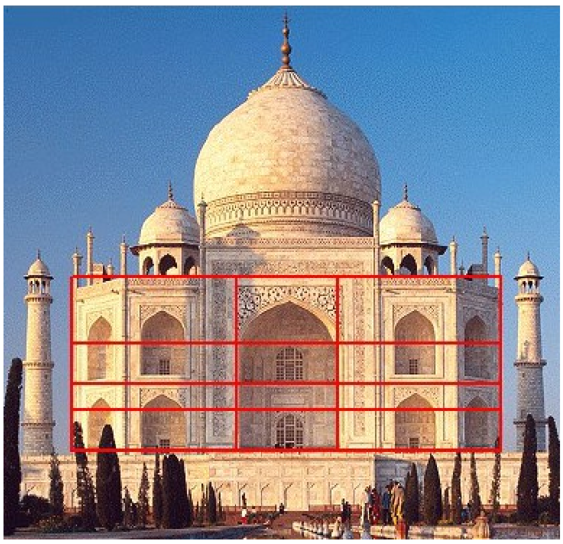


Image :2



Notre dame de Paris



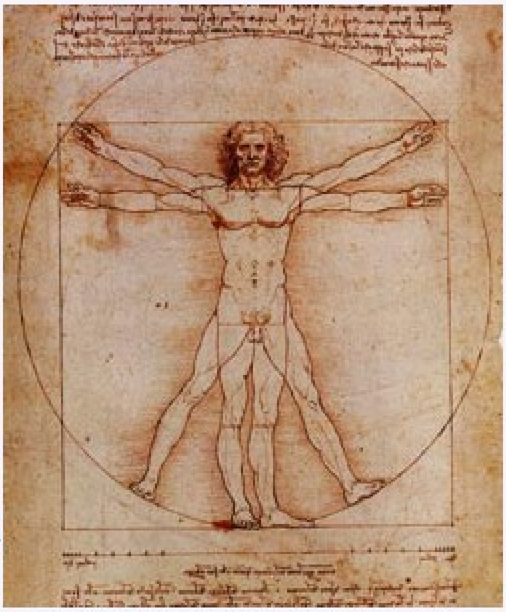
Taj mahal

Léonard réalisa les illustrations d'une œuvre au contenu purement mathématique, écrite par son ami Luca Pacioli et intitulée *De divina proportione*, c'est-à-dire *La Divine Proportion*.

Ritratto di Frà Luca Pacioli (1495).
Luca Pacioli faisant la démonstration d'un théorème d'Euclide (tableau attribué à Jacopo de' Barbari)

Le dessin de l'« homme de Vitruve » par Léonard de Vinci : la vraie source, en l'absence de code

L'homme inscrit dans un cercle et dans un carré, réalisé sur le même dessin par Léonard de Vinci (1452-1519), illustre un passage du livre « De Architectura » de Vitruve (Marcus Vitruvius Pollo, 1er siècle avant Jésus-Christ,actif sous Jules César et Auguste) que la renaissance a réédité et adulé.



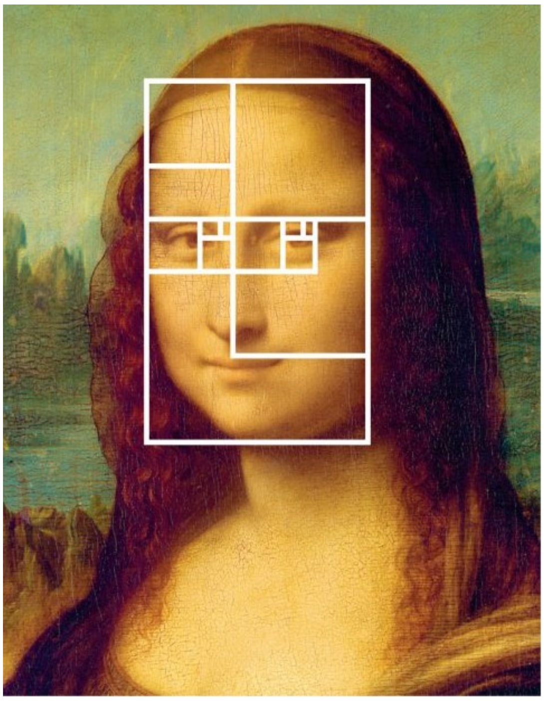
Léonard de Vinci, circa 1490 : "l'homme de Vitruve"
Noter l'échelle de mesure au dessous du dessin qui comporte plusieurs repères linéaires. Gallerie dell'Academia, Venise, 344x245 mm

IV) Nombre d'or et la peinture

L'encre a déjà abondamment coulé pour lever le voile sur le mystère que cache le sourire le plus célèbre de l'histoire de l'art.

Mais on peut aussi envisager une solution géométrique à l'énigme. Voyons ce qui se passerait si nous superposions plusieurs rectangles d'or sur le visage de la belle Joconde Léonard de Vinci avait-il en tête la proportion d'or quand il réalisa son œuvre maîtresse ? L'affirmer serait aventureux.

Il serait moins risqué de se contenter de dire que le génie florentin accordait une grande importance à la relation entre l'esthétique et les mathématiques.



Dali - Le Sacrement de la dernière Cène, 1955, huile sur toile, 168,3 cm x 270 cm
National Gallery of Art, Washington DC

Achevé en 1955 après neuf mois de travaux, la peinture de Salvador Dali Le sacrement de la Dernière cène est restée l'une de ses compositions les plus populaires. cette composition a été réalisée à l'aide du nombre d'or.

Le sacrement de la dernière Cène
La Cène (terme issu du latin cena : repas du soir) est le nom donné par les chrétiens au dernier repas que Jésus-Christ prit avec les douze apôtres le soir du Jeudi saint, avant la Pâque juive, peu de temps avant son arrestation, la veille de sa crucifixion (appelée encore Passion par les chrétiens), et trois jours avant sa résurrection. Cet événement fondateur du christianisme a souvent été représenté en peinture notamment par Léonard de Vinci en 1495.

Dali organise la composition du sujet autour de plusieurs lignes droites rayonnant à partir de la tête du Christ vers les côtés et les coins du tableau : les lignes de fuite convergent vers le point de fuite qui est la tête du Christ. La tête du Christ occupe une position centrale dans le tableau, à l'intersection des diagonales de ce rectangle. La composition se devait alors de mettre en valeur le sujet tout en produisant une circulation du regard afin de créer, au cœur de la toile, une harmonie absolue.
En outre, il a positionné la table exactement à la section d'or de la hauteur de sa peinture. Ensuite, il a placé les deux disciples au côtés du Christ, sur des points d'or du rectangle. Cette organisation est renforcée par la présence, au second plan du tableau, d'une structure polyédrique. Salvador Dali décrira par la suite son œuvre en tant que « cosmogonie arithmétique et philosophique
fondée sur la sublimité paranoïaque du nombre douze ». En effet, le polyèdre dans lequel Dali a placé La Cène est un dodécaèdre régulier, c'est-à-dire un polyèdre régulier composé de 12 faces ayant la forme de pentagones réguliers, ces douze faces correspondant aux douze apôtres.
De tout temps, l'artiste a cherché à produire cet équilibre entre la figure et son environnement. Cette quête trouva sa réponse dans le Nombre d'Or, auquel il eut recours dans de nombreuses peintures de sa période atomique, période pendant laquelle il revisitait des grands thèmes de l'histoire occidentale et cherchait
l'harmonie grâce aux mathématiques.
Dali

Sandro Botticelli, La naissance de Vénus, *tempera, 1485*
172,5 x 278,5 cm
Galerie des Offices, Florence, Italie

Naissance de Vénus » : Sandro Botticelli (1485)
Ses dimensions 172,5x278,5 cm respectent précisément la proportion dorée. Le carré, associé au rectangle d'or, correspond à un rythme du tableau. Enfin la diagonale du rectangle restant, ainsi que celle symétrique, sont des lignes de forces : Le groupe des Vents, à gauche du tableau et

le personnage de la Grâce à droite, s'inscrivent dans des rectangles.

V) Le nombre d'or et la nature

Chez l'homme

En vous mesurant :
Si les rapports « hauteur totale /hauteur nombril et « distance sol-nombril/ distance nombril -sommet du crâne » sont égaux (environ 1,618) alors vous êtes bien proportionnés

cette courbe sinueuse est une bonne approximation d'une courbe appelée *spirale logarithmique*. Loin d'être une simple curiosité mathématique, elle peut s'observer très facilement dans notre environnement, (même si toutes ne sont pas reliées au nombre d'or) de la coquille d'un escargot…

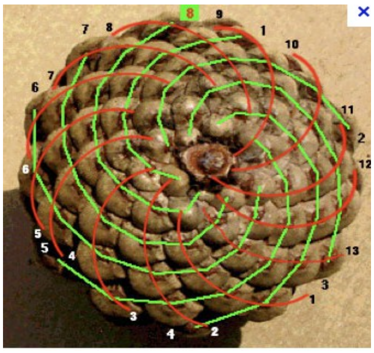
Et enfin, on retrouve le nombre d'or, la suite de Fibonacci plus précisément, chez les fleurs. On sait déjà qu'une marguerite a un lien direct avec les termes de la suite de Fibonacci.
Mais il se trouve qu'après une observation minutieuse, on se rend vite compte qu'il n'y a pas beaucoup de fleur à 4, 6, 9, 12 pétales par exemple, alors qu'une écrasante majorité des fleurs possèdent 3,5,8,13 pétales… c'est à dire un nombre de pétales qui appartient à la suite de Fibonacci

Si on coupe une pomme en deux on découvre les pépins disposés en une belle étoile à 5 branches.

(la présence du pentagone régulier traduit la présence du nombre)

- C'est aussi le rapport d'écartement entre les feuilles des arbres afin d'éviter

qu'elles ne se fassent de l'ombre. (l'écartement entre chaque feuille correspond à un angle (360° / nombre d'or) pour avoir un maximum d'espace et de lumière).



- L'enroulement régulier d'une ammonite (fossile) se fait suivant une spirale d'or géométrique.
  Spirale que l'on retrouve également dans le tournesol.